

可变利率的寿险净保费计算模型的改进

邹辉

(广东工业大学 应用数学系, 广东 广州 510090)

摘要:根据实际情况将利率看作变量,建立了可变化利率时的一般寿险与年金的一次缴清保费的计算模型,从而对传统的寿险中将利率看作常数的净保费计算方法进行了改进,并利用建立的新模型对实例进行了分析.

关键词:寿险;净保费;变利率

中图分类号:F840

文献标识码:A

文章编号:1007-7162(2003)03-0097-04

1 可变的利率

一般寿险净保费用计算都是遵循期望值原理,即 $E(\text{保险费收入的现值}) = E(\text{保险费支出的现值})$. 受益函数、贴现函数和现值函数分别为 $B(t)$, $V(t)$, $C(t)$, 则有

$$C(t) = B(t) * V(t).$$

其中贴现函数:

$$V(t) = e^{-\int_0^t \delta_r dr},$$

δ_r 为时刻 r 时瞬间获取利息的能力,简称利力^[1]. 当利率 i 和利力 δ 为常数时,贴现函数为

$$V(t) = e^{-\delta t} = (1+i)^{-t}.$$

根据这个原理以及利率为常数的假设,可以得到关于连续或离散的一般寿险与年金净保费的公式^[1].

但在实际生活中,利率作为政府调节宏观的经济的一种货币政策工具,是不断在变化的. 假设变利率是相关的,一般可用 AR(自回归)模型,或用水平模型^[2],或基于水平模型的利率结构转换模型^[3]来描述利率的波动. 比如用一阶自回归过程 AR(1) 或二阶回归过程 AR(2) 来建立利率和利力的递推模型如下:

$$\begin{aligned} i_t &= i + k(i_{t-1} - i) + e_t, & 0 \leq k \leq 1, \\ \delta_{[t]} &= \delta + k_1(\delta_{[t-1]} - \delta) + k_2(\delta_{[t-2]} - \delta) + e_t. \end{aligned}$$

其中 e_t 是误差项, δ 为利力, i 为利率.

利率变化可归结两种形式:

(1) 第一种变化情况考虑利力是连续变化的.

(2) 第二种变化类型考虑一个时期中实质利率的变化,这种变化是实际中最常见的. 下面将分别根据这两种情况建立变利率的净保费的计算模型.

收稿日期:2002-05-23

作者简介:邹辉(1975-),女,助教,主要研究方向为数量经济.

2 利力连续变化时净保费计算模型的建立

当利力连续变化时, 现值函数

$$C(t) = e^{-\int_0^t \delta_r dr}.$$

这样, 当利力连续变化时给出如下 4 个定理(其中 μ_x 年龄为 x 岁的人的死亡率, ${}_tP_x$ 为年龄为 x 岁的人活到 $x+t$ 岁时的概率, q_x 表示年龄 x 岁的人在一年中死亡的概率, l_x 表示生命表中 x 岁的人在年初的生存人数).

定理 1 即期给付的寿险模型的一次净保费的计算公式为

$$A_x = \int_0^{\infty} e^{-\int_0^t \delta_r dr} {}_tP_x \mu_{x+t} dt.$$

证明:

$$A_x = E(C(t)) = \int_0^{\infty} C(t) g(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\int_0^t \delta_r dr} {}_tP_x \mu_{x+t} dt,$$

定理得证.

定理 2 死亡年年末给付的一般寿险系统一次净保费的计算公式为

$$\bar{A}_x = \sum_l e^{-\int_0^{l+1} \delta_r dr} {}_lP_x q_{x+l},$$

证明:

$$\bar{A}_x = E(C(l+1)) = \sum_l C(l+1) {}_lP_x q_{x+l} = \sum_l e^{-\int_0^{l+1} \delta_r dr} {}_lP_x q_{x+l},$$

定理得证.

定理 3 连续年金的一次保净费的计算公式为

$$a_x = \int_0^{\infty} e^{-\int_0^t \delta_r dr} {}_tP_x dt.$$

证明:

$$a_x = \int_0^{\infty} V(t) {}_tP_x dt = \int_0^{\infty} e^{-\int_0^t \delta_r dr} {}_tP_x dt,$$

定理得证.

定理 4 离散年金的一次净保费的计算公式为

$$\bar{a}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\int_0^k \delta_r dr} l_{x+k}.$$

证明:

$$\bar{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} V(t)_k P_x = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\int_0^k \delta_r dr} {}_kP_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\int_0^k \delta_r dr} l_{x+k},$$

定理得证.

3 利率离散变化时净保费计算模型的建立

当利率离散变化时, 对于死亡年年末给付的一般寿险模型, 有

$$C(t) = \prod_{k=1}^t (i_k + 1)^{-1} = \prod_{k=1}^t v_k.$$

对于即期给付的一般寿险模型, 有

$$C(t) = \prod_{k=1}^t (i_k + 1)^{-1} = \prod_{k=1}^{[t]} (1 + i_k)^{-1} \left(\frac{1}{1 + i_{[t]+1}} \right)^{t-[t]} = \prod_{k=1}^{[t]} v_k v_{[t]+1}^{t-[t]}.$$

因此,对于离散的利率有如下4个定理:

定理5 死亡年年末给付的一般寿险模型的一次净保费计算公式为

$$\bar{A} = \sum_l \prod_{k=1}^{l+1} v_k {}_lP_x q_{x+l}.$$

证明:

$$\bar{A} = E(C(l+1)) = \sum_l C(l+1) {}_lP_x q_{x+l} = \sum_l \prod_{k=1}^{l+1} v_k {}_lP_x q_{x+l},$$

定理得证.

定理6 即期给付的一般寿险模型的一次净保费的计算公式为

$$A_x = \int_0^\infty \prod_{k=1}^{[t]} v_k v_{[t]+1}^{t-[t]} {}_tP_x \mu_{x+t} dt.$$

证明:

$$A_x = E(C(T)) = \int_0^\infty C(t) {}_tP_x \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty \prod_{k=1}^{[t]} v_k v_{[t]+1}^{t-[t]} {}_tP_x \mu_{x+t} dt,$$

定理得证.

定理7 连续年金的一次净保费的计算公式为

$$a_x = \int_0^\infty \prod_{k=1}^t v_k {}_tP_x dt.$$

证明:

$$a_x = \int_0^\infty C(t) {}_tP_x dt = \int_0^\infty \prod_{k=1}^t v_k {}_tP_x dt,$$

定理得证.

定理8 离散年金的一次净保费的计算公式为

$$\bar{a}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^\infty \prod_{t=1}^k v_t l_{x+k}.$$

证明:

$$\bar{a}_x = \sum_{k=0}^\infty \prod_{t=1}^k v_t P_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^\infty \prod_{t=1}^k v_t l_{x+k},$$

定理得证.

值得注意的是,根据可变利率得到的净保费的计算公式不能用生命表中的确定的函数来表示,所以计算相对繁琐一点,只在某些特定的假设条件下计算会简化.

4 实例分析

下面我们对新建立的计算模型和传统的计算模型进行实例分析与对比.

例1:向45岁的人签发5年期的保险金额为1 000元的定期寿险单,假设期初人数为 $l_0 = 1\,000\,000$,在每一年龄段的死亡人数如下:

年龄 x	死亡人数 d_x
45	4 841
46	5 247
47	5 691
48	6 179
49	6 710

(1) 假设保险公司没有考虑到预期利率的变化趋势, 将它看作是常数, 设 $i = 4\%$. 计算年末给付的一次缴清保险费.

解: 根据传统的算法^[1], 年末给付的一次缴清保险费为

$$\bar{A}_x = 1\,000 \times \sum_{k=0}^4 v^{k+1} {}_kP_x \mu_{x+k} = 1\,000 \times \sum_{k=0}^4 v^{k+1} \frac{d_{45+k}}{l_0} = 1\,000 \times \sum_{k=0}^4 (1 + 4\%)^{-k-1} \frac{d_{45+k}}{l_0} = 25.36,$$

所以一次缴清的保险费为 25.36 元.

(2) 假设保险公司根据当时的经济环境与变动利率的递推公式预测到未来第 1 年利率为 4%, 第 2 年为 5%, 第 3 年为 3%, 第 4 年为 2.5%, 第 5 年为 2%, 此时再计算年末给付保险金的一次净保费.

解: 根据本文中的定理 5, 有

$$\bar{A} = 1\,000 \times \sum_{l=0}^4 \prod_{k=1}^{l+1} v_k {}_lP_x \mu_{x+l} = 1\,000 \times \sum_{l=0}^4 \prod_{k=1}^{l+1} v_k \frac{d_{45+k}}{l_0} = 25.68,$$

所以一次缴清保险费为 25.68 元.

相比之下, 如果不考虑到利率的变化, 保险公司将损失

$$1\,000\,000 \times (25.68 - 25.36) = 320\,000 \text{ 元}.$$

结果表明, 在计算净保费时将利率考虑为时间的变量是符合实际和保险公司的长远利益的.

参考文献

- [1] N. L. Bowers. 精算数学[M]. 余跃年, 郑温瑜译. 上海: 科学技术出版社, 1998.
- [2] S G Kellison. 利息理论[M]. 尚汗翼译, 上海: 科学技术出版社, 1998.
- [3] 谢赤, 吴伟雄. 一个基于水平模型的利率结构转换模型[J]. 系统工程, 2002(1): 20-23.

Improvement to Premium Calculation With Variable Interest

ZOU Hui

(Dept. of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China)

Abstract: In the paper, interest is regarded as a variable according to real situation, and new models about calculating net premium are given out. Furthermore, an example is given to compare traditional models with our new ones, which shows that new models are more beneficial to insurance companies.

Key words: life insurance; net premium; variable interest